各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科
成田　知将 (Kazumasa NARITA) *

概要

各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $(M,g) \to (B,j)$ が与えられたとき, 標準的変分と呼ばれる M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ を考える．ラプラス・ベルトラミ作用素 $\Delta_{g_t}^M$ の最小正固有値を $\lambda_1(g_t)$, (M,g_t) の体積を $\mathrm{Vol}(M,g_t)$ とする．1982 年, Bérard-Bergery と Bourguignon は $t \to 0$ としたとき, スケール不変な量 $\lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/\dim M}$ が 0 に収束することを示した．本講演では, リッチ曲率に関するある仮定の下で, $t \to \infty$ のとき $\lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/\dim M}$ が発散することについて述べる．本小論はプレプリント [9] に基づく．

1　導入

1.1　設定

まず, 本小論における設定を述べる．M は連結かつ閉な（つまり, コンパクトで境界がない)n 次元多様体とする．M 上にリーマン計量 g が与えられたとき, (M,g) を（連結かつ閉な）**リーマン多様体**という．(M,g) に対し, その**体積** $\mathrm{Vol}(M,g)$ が定まる．(いま M はコンパクトなので体積は有限の値である.) ユークリッド空間における通常のラプラシアンの一般化として, リーマン多様体 (M,g) 上には**ラプラス・ベルトラミ作用素**（あるいは単に**ラプラシアン**）Δ_g^M が定まる．ただし, ここでラプラシアンの符号はラプラシアンが正値作用素になるように符号を定める．例えば, $\mathbf{R}$ における（ユークリッド計量に関する）ラプラシアンは $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ となる．$\Delta_g^M f = \lambda f$ をみたす（C^∞ 級）関数 f を**固有関数**, λ を**固有値**という．I を $C^\infty(M)$ 上の恒等写像とする．$E_\lambda := \mathrm{Ker}(\Delta_g^M - \lambda I)$ を λ に対応する**固有関数空間**といい, その次元を固有値 λ の**重複度**という．いま, ラプラシアンは正値となるように定めたから, 固有値は非負である．また, 固有値 0 に対応する固有関数たちは定数関数たちで, M は連結なので, その重複度は 1 である．$0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) < \lambda_2(g) < \cdots < \lambda_l(g) < \cdots \to \infty$ を Δ_g^M の固有値とする．任意の l に対し, $\lambda_l(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ はスケール不変な量である．すなわち, $g \mapsto cg$ $(c > 0)$ という変換について不変な量である．M が閉曲面, すなわち $n = 2$ のときには, $\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ を $\mathrm{Area}(M,g)$ と書くことにする．

* E-mail:m19032e@math.nagoya-u.ac.jp

1.2 歴史的背景

この小節では, $\lambda_1(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ に関する研究の歴史について述べる. 1970 年, Hersch [6] は 2 次元球面 S^2 に対し, $\lambda_1(g)\mathrm{Area}(S^2,g)$ は g が標準計量（の正の定数倍）のときに最大値 8π をとり, また最大値を実現するのは g が標準計量（の正の定数倍）のときのみであることを示した. この結果を背景として, Berger [2] は次の問いを立てた:

問 1.1 ([2]). 連結な n 次元閉多様体 M に対し,

$$\Lambda_1(M) := \sup_g \lambda_1(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$$

は有限か?

言い換えれば, M 上の体積一定のリーマン計量全体の上の汎関数 λ_1 の上限は有限か, という問題である. この問題は現在では完全に解決されている. この問題に対する解答は M が 2 次元のときと 3 次元以上のときで大きく異なる. まず, M が 2 次元のとき, すなわち M が閉曲面の場合について述べる. 1980 年, Yang と Yau [12] は M が種数 γ の向き付け可能閉曲面であるとき, $\Lambda_1(M)$ が $8\pi\lfloor(\gamma+3)/2\rfloor$ 以下であることを示した. ただし, この評価はシャープではないため, 最大値を具体的に求めることは各種数ごとに別個に考えなければいけない問題である. (話が主題から逸れるので詳しく述べないが, 現在は γ が 2 以下の場合には $\Lambda_1(M)$ の最大値が求まっている.） 2016 年, Karpukhin が向き付け不可能な閉曲面に対して, Yang と Yau の結果を拡張し, $\Lambda_1(M)$ が M の位相的不変量に依存する定数で上から抑えることができることを示した. 以上より, M が閉曲面の場合には, Berger の上の問いは肯定的に解決されている.

一方で, M が 3 次元以上のときには, 上の問いは否定的に解決されている. 1979 年, 浦川肇[*1] [11] は 3 次元コンパクトリー群 SU(2) 上のあるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ に対し, $\lambda_1(h_t)\mathrm{Vol}(\mathrm{SU}(2),h_t)^{2/3}$ を具体的に計算し, この量が $t\to 0$ のとき 0 に収束し, $t\to\infty$ のとき, ∞ に発散することを示した. SU(2) は 3 次元球面と自然に同一視できる. 浦川のこの仕事の直後, 丹野修吉はその仕事を奇数次元球面に一般化した. 丹野は Hopf ファイブレーション $S^1\to S^{2n+1}\to \mathbf{C}P^n$ を考え, S^{2n+1} が正則な佐々木構造を持つことに着目した. 丹野は S^{2n+1} 上のあるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ に対し, $\lambda_1(h_t)\mathrm{Vol}(S^{2n+1},h_t)^{2/(2n+1)}$ を具体的に計算し, この量が $t\to 0$ のとき 0 に収束し, $t\to\infty$ のとき, ∞ に発散することを示した. さらに, 丹野の仕事の直後に武藤秀夫 [8] は丹野の結果を 3 次元以上の任意の次元の球面に一般化した. これらの研究をもとにして, 1994 年に Colbois と Dodziuk [4] は, 3 次元以上の任意の連結な閉多様体 M に対し, ある M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(k_t)_{t>0}$ が存在して, $t\to\infty$ のとき, $\lambda_1(k_t)\mathrm{Vol}(M,k_t)^{2/n}$ が発散することを示した. とくに, Berger の上の問は 3 次元以上の任意の多様体に対して否定的に解決された.

[*1] この小論では敬称を省略する.

2 主結果

この節では筆者による主結果について述べる．主結果はリーマン沈め込みに関するものなので，まずは準備としてリーマン沈め込みについて述べる．

2.1 準備: リーマン沈め込み

(M, g), (B, j) を連結な閉リーマン多様体で，それぞれの次元を n, p とする．$\pi : (M, g) \to (B, j)$ が**リーマン沈め込み**であるとは，$\pi : M \to B$ が沈め込みで，各 $m \in M$ において $d\pi_m : (H_m M, g_m) \to (T_{\pi(m)} B, j_{\pi(m)})$ が内積空間の間の内積を保つ線型同型写像であることをいう．ただし，ここで $H_m M$ とは，$V_m M := \mathrm{Ker}(d\pi_m)$ の $T_m M$ における g_m に関する直交補空間である．$H_m M$ を m における**水平空間**, $V_m M$ を m における**垂直空間**という．各 $m \in M$ に対し，$\pi(m) \in B$ におけるファイバー $\pi^{-1}(\pi(m))$ を $F_{\pi(m)}$ と書く．各ファイバー $F_{\pi(m)}$ は M の $(n-p)$ 次元部分多様体である．$\iota : F_{\pi_m} \hookrightarrow M$ を包含写像とする．各ファイバー $F_{\pi(m)}$ が**全測地的**であるとは，部分多様体 $F_{\pi(m)}$ の (M, g) における第二基本形式がいたるところ 0 であることをいう．1960 年，Hermann [5] は，各ファイバーが全測地的であるようなリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ について，そのファイバーたちは互いに等長的（つまりリーマン多様体として同型）であることを示した．

2.2 Bérard-Bergery と Bourguignon による先行研究

筆者による主結果は，1982 年の Bérard-Bergery と Bourguignon の論文 [1] の後続の研究である．まず彼らの論文が先述の Colbois と Dodziuk による研究 [4] の前のものであることに注意されたい．Bérard-Bergery と Bourguignon が [1] において示したことを一言で要約すると，彼らは前節において述べた，Hopf ファイブレーションに着目した丹野修吉の研究を部分的に一般化した．以下では，Bérard-Bergery と Bourguignon の仕事をより詳しく述べる．

(M, g), (B, j) を連結な閉リーマン多様体で，それぞれの次元を n, p とする．$\pi : (M, g) \to (B, j)$ をリーマン沈め込みとする．Bérard-Bergery と Bourguignon は**垂直ラプラシアン** Δ_v と**水平ラプラシアン** Δ_h を次のように定めた: $f \in C^\infty(M)$ に対し，$\Delta_v f$, $\Delta_h f$ をそれぞれ

$$(\Delta_v f)(m) := \Delta^{F_{\pi(m)}}(f \restriction_{F_{\pi(m)}})(m),$$

$$\Delta_h f := \Delta_g^M f - \Delta_v f,$$

により定める．ここで，$\Delta^{F_{\pi(m)}}$ はリーマン多様体 $(F_{\pi(m)}, \iota^* g)$ のラプラシアンである．垂直ラプラシアンと水平ラプラシアンは $L^2(M, g)$ における正値な形式的随伴作用素である．Bérard-Bergery と Bourguignon たち自身が述べていることであるが，垂直ラプラシアンも水平ラプラシアンも楕円型作用素ではないから，これらの名前はかなりミスリーディングである．また，垂直ラプラシアンのスペクトラムは離散的であるが，水平ラプラシアンのスペクトラムは離散的とは限らない．Bérard-Bergery と Bourguignon は，リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ に関する g の**標準的変分** $(g_t)_{t>0}$ を定義した:

定義 2.1. $\pi : (M, g) \to (B, j)$ をリーマン沈め込みとする．各 $t > 0$ に対し, 次の 3 条件をみたす M 上のリーマン計量 g_t が一意的に定まる:

1. $g_t \restriction_{V_m M \times H_m M} = 0$.
2. $g_t \restriction_{H_m M \times H_m M} = g \restriction_{H_m M \times H_m M}$.
3. $g_t \restriction_{V_m M \times V_m M} = t^2 g \restriction_{V_m M \times V_m M}$.

リーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ をリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ に関する g の**標準的変分**という.

上の定義において, 明らかに $g_1 = g$ である．また, $\mathrm{Vol}(M, g_t) = t^{n-p}\mathrm{Vol}(M, g)$ が成り立つことがわかる．さらに, リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ の各ファイバーが全測地的なとき, 任意の $t > 0$ に対し, $\pi : (M, g_t) \to (B, j)$ も各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとなることが容易にわかる．リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ の各ファイバーが全測地的なとき, (M, g_t) 上のラプラシアン $\Delta^M_{g_t}$ に関して, Bérard-Bergery と Bourguignon は次の公式を示した:

$$\Delta^M_{g_t} = t^{-2}\Delta_v + \Delta_h = t^{-2}\Delta^M_g + (1 - t^{-2})\Delta_h. \tag{2.1}$$

とくに, $\Delta^M_{g_t}$ は与えられたリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ に関する作用素 Δ^M_g, Δ_v, Δ_h のみによって表せる．標準的変分 $(g_t)_{t>0}$ に関して,

$$\Lambda_1(M, t) := \lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M, g_t)^{2/n}$$

とおく．Bérard-Bergery と Bourguignon は次を示した:

定理 2.2 ([1])**.** (M, g), (B, j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする．$\pi : (M, g) \to (B, j)$ を各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みとする．このとき, $\lim_{t\to 0} \Lambda_1(M, t) = 0$ が成り立つ.

この結果は先述の丹野修吉の結果の部分的な一般化とみなせる．丹野が原論文 [10] において考察した S^{2n+1} 上のリーマン計量の 1 パラメータ族は標準的変分とわずかに異なるが, 本質的には同じもので, 丹野による結果はすぐに標準的変分に関するものに書き換えることができる．丹野の論文 [10] によれば, Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ に関する, 標準計量 g の標準的変分 $(g_t)_{t>0}$ について, $\Lambda_1(S^{2n+1}, t) = \min\{2n + t^{-2}, 4(n + 1)\}t^{1/(2n+1)}\mathrm{Vol}(S^{2n+1}, g)^{1/(2n+1)}$ を得る．このことからとくに, $\lim_{t\to 0} \Lambda_1(S^{2n+1}, t) = 0$ が成り立つので, 定理 2.2 は丹野の結果の定性的な一般化になっている．しかしながら, $t \to \infty$ のときはどうだろうか? 丹野の結果によれば, $\lim_{t\to\infty} \Lambda_1(S^{2n+1}, t) = \infty$ が成り立つが, これは Hopf ファイブレーションだけでなく一般の, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みの場合にも成り立つだろうか? この問は前節で述べた Berger の問の観点から重要であるが, Bérard-Bergery と Bourguignon が与えた十分条件は実用性に乏しく, 満足のいくものとは程遠い. 筆者の主結果はこの問に答えるものである.

2.3 主結果と例

前小節の最後に述べた問題を動機として, 筆者は [9] において次を示した:

定理 2.3 ([9]). (M,g), (B,j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする. $\pi:(M,g)\to(B,j)$ を各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みとする.

$$\mathrm{Ric}^M \geq \widetilde{c} g$$

をみたす $\widetilde{c} > 0$ が存在すると仮定する. ここで, Ric^M は (M,g) のリッチテンソルである. $p \leq n-2$ の場合は, さらに任意の $y \in B$ に対して,

$$\mathrm{Ric}^{F_y} = c(\iota^* g)$$

となる $0 \leq c < \widetilde{c}$ が存在すると仮定する. このとき,

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda_1(M,t) = \infty$$

が成り立つ.

この結果から, とくに Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ に関して, $\lim_{t\to\infty}\Lambda_1(S^{2n+1},t) = \infty$ がいえ, 丹野の結果の定性的な一般化になっている. 上の主結果は非常に多くの例に適用できるため, そのすべてを挙げることはできない. 詳しくは [9] を参照されたい. 今までは古典的な研究の話ばかりであったので, 最近の研究との関連がわかる例を 1 つ挙げる.

例 2.4. $\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^{2n+1} \to \mathbf{H}P^n$ は各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みである. ここで, どの射影空間にも標準的な計量が入っているものとする. とくに, $\mathbf{C}P^{2n+1}$ 上の標準計量である Fubini–Study 計量を g_{FS} と書く. 2022 年, Bettiol, Lauret と Piccione [3] は $\lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1}, g_t) = \min\{8n+8t^{-2}, 8(n+1)\}$, したがってとくに $\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1}, g_t) = \min\{8n+8t^{-2}, 8(n+1)\}t^{2/(2n+1)}\mathrm{Vol}(\mathbf{C}P^{2n+1}, g_{FS})^{2/(2n+1)}$ であることを示した. とくに,

$$\lim_{t\to 0}\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},t) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty}\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},t) = \infty \tag{2.2}$$

がいえる. 一方, このリーマン沈め込みは主結果 2.3 の仮定をみたす. したがって, 定理 2.2 と定理 2.3 より, 直ちに (2.2) が従う.

実は, 上のリーマン沈め込みは, 正のスカラー曲率をもつ四元数ケーラー多様体のツイスターファイブレーションの典型例である. ツイスターファイブレーションの全空間 (**ツイスター空間**と呼ばれる) は, ($\mathbf{C}P^{2n+1}$ がそうであるように) ケーラーアインシュタイン計量を許容し, しかもリーマン沈め込みの各ファイバーは全測地的となる. ツイスター空間 Z のラプラシアンの最小正固有値を求めることは, 上の例 $\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^{2n+1} \to \mathbf{H}P^n$ を除けば, 極めて困難であると認識されているが, 定理 2.2 と定理 2.3 より,

$$\lim_{t\to 0}\Lambda_1(Z,t) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty}\Lambda_1(Z,t) = \infty$$

であることはわかる. この意味で, 筆者による主結果 2.3 は知られていることの定性的一般化にとどまらず, 固有値問題に新しい事実をもたらすものである.

最後に, 主結果 2.3 の曲率に関する仮定は除くことができないことを例を通して確認する.

例 2.5. 標準計量 $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ を備えた平坦トーラス $T^n := \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ $(n \geq 2)$ を考える．$(x^1, \ldots, x^n)$ を T^n 上の標準的な座標とする．標準的な射影

$$\pi : T^n \to T^{n-1}, \quad (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^{n-1}).$$

を考える．明らかに, π は各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みである．しかしながら, このリーマン沈め込みは 2.3 の曲率に関する仮定をみたさない．各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ とおく．このとき,

$$\Delta^{T^n} = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2, \quad \Delta_v = -\partial_n^2, \quad \Delta_h = -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2.$$

が成り立つ．

$$\mathrm{Spec}(\Delta^{T^n}) = \{4\pi^2 |y|^2 \mid y \in \mathbf{Z}^n\}$$

であることが知られている．また, 各 $y, -y \in \mathbf{Z}^n$ に対し, 対応する固有関数空間は $\mathrm{span}\{\varphi_y(x) := \cos(2\pi\langle x, y\rangle), \psi_y(x) := \sin(2\pi\langle x, y\rangle)\}$ であることが知られている．$\{e_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする．(2.1) より，$t > 1$ に対して，$\lambda_1(g_t) = 4\pi^2 t^{-2}$ が成り立ち，対応する固有関数空間は $\mathrm{span}\{\varphi_{e_n}(x) = \cos(2\pi x^n), \psi_{e_n}(x) = \sin(2\pi x^n)\}$ であることがわかる．ゆえに,

$$\Lambda_1(T^n, t) = \lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(T^n, g_t)^{2/n} = 4\pi^2 t^{2(1-n)/n} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

となる．

参考文献

[1] Bérard-Bergery L. and Bourguignon, J. -P. : Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers, Illinois J. Math. **26**(1982), no.2, 181–200.

[2] Berger, M. : Sur les premiéres valeurs propres des variétés Riemanniennes, Compositio. Math. **26**(1973), 129–149.

[3] Bettiol, R. G., Lauret, E. A. and Piccione, P. : The First Eigenvalue of a Homogeneous CROSS, J. Geom. Anal. **32**(2022), Article No. 76, 63pp.

[4] Colbois B. and Dodziuk, J. : Riemannian metrics with large λ_1, Proc. Amer. Math. Soc. **122**(1994), 905–906.

[5] Hermann, R. : A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 236–242.

[6] Hersch, J. : Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **270**(1970), A1645–A1648.

[7] Karpukhin, M. : Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on non-orientable surfaces, Int. Math. Res. Notes **20**(2016), 6200–6209.

[8] Muto, H. : The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres, Tôhoku Math. J. **32**(1980), 427–432.

[9] Narita, K. : Remark on Laplacians and Riemannian Submersions with Totally Geodesic Fibers, arxiv:2411.17078

[10] Tanno, S. : The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, Tôhoku Math J. **31**(1979), 179–185.

[11] Urakawa, H. : On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan **31**(1979), 209–226.

[12] Yang, P. and Yau, S. T. : Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7**(1980), no.4, 55–63.